Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

из предмета *Математика*

Примери метричких простора

Ученик
Душан Дробњак, IVд

Ментор
др Бобан Маринковић

Београд, јун 2014.

Садржај

1 Увод

Шта је то простор и како меримо растојање између две тачке нам је свима интуитивно јасно. Наш простор замишљамо као један тродимензиони, веома густ скуп тачака где је свака од њих одређена са три реална броја – њене координате, задате у односу на изабрани почетак и осе. Растојање d између две тачке одређене са $X = (x_1, x_2, x_3)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)$ (које можемо схватити и као функцију од две променљиве зависну само од поменутих тачака и означавати са $d(X, Y)$) меримо добро нам познатом **Питагорином теоремом** као:

$$d = d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Случај за једну димензију је доста једноставнији, а одговара ситуацији тачака на реалној правој, где је свакој тачки додељен један реалан број. Растојање између две тачке x и y тада дефинишемо као

$$d = |x - y|.$$

Знамо да је растојање јединствено, па је логично назвати га функцијом. Ова функција слика неки Декартов производ истих скупова (у нашем случају скуп тачака у тродимензионом еуклидском простору $\mathbb{E}^3$) у скуп реалних бројева. Из праксе нам је познато да је растојање увек ненегативан реалан број, који је нула ако и само ако се тачке између којих меримо растојање поклапају. На неки начин је интуитивно да је *функција растојања* симетрична, тј. $d(X, Y) = d(Y, X)$. Коначно, позната нам је **неједнакост троугла** која каже да за било које три тачке A, B и C важи:

$$d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C).$$

Све ове особине су навеле на формално дефинисање појма функције растојања, која ће бити основа за дефинисање појма метричког простора.

Први математичар који се бавио метричким просторима био је Морис Фреше[1] у својој докторској дисертацији под називом *О неким тачкама функционалне анализе*[2]. Овде је Фреше дефинисао концепт метричких простора, док сам назив *метрички простор* потиче од Феликса Хауздорфа[3].

Слика 1: Морис Фреше (лево) и Феликс Хауздорф (десно)

[1] Maurice René Fréchet (1878 – 1973), француски математичар
[2] Sur quelques points du calcul fonctionnel, 1906
[3] Felix Hausdorff (1868 – 1942), немачки математичар

2 Основни појмови

21. Метрика и метрички простор

Многи појмови математике, посебно математичке анализе су успешно дефинисани јер постоји појам о растојању на неком скупу. Међу њима су и конвергенција, непрекидност, гранична вредност (где говоримо о *јако малом растојању*) – појмови од којих се полази. Тако исте ове појмове можемо дефинисати и на другим скуповима, осим скупа $\mathbb{R}$ реалних бројева. Као што је скуп реалних бројева био основа за испитивање функције једне променљиве, тако ће и вишедимензиони простори ($\mathbb{R}^n$) бити основа за дефинисање појмова математичке анализе на функцијама више променљивих. Следи дефиниција коју је дао Фреше.

Дефиниција 1. Нека је $\mathbb{X}$ произвољан[4] скуп. Функција $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ која задовољава да за све $x, y, z \in \mathbb{X}$ важе следеће особине

M1) $d(x, y) \geqslant 0$;

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M3) $d(x, y) = d(y, x)$;

M4) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$;

називамо *метриком* или *растојањем* у скупу $\mathbb{X}$.

Ова функција се аксиоматски могла засновати на више начина, који би били еквивалентни приложеном. У прилог томе иде и чињеница да је особина M1 на неки начин *вишак* у овој дефиницији јер се може извести из осталих. Применимо ли M4 на елементе x, y, x, а потом и M3 и M2: $2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geqslant d(x, x) = 0$, одакле је $(\forall x, y \in \mathbb{X})\, d(x, y) \geqslant 0$. Међутим, ова дефиниција је широко призната и коришћена у литератури. Особину M1 називамо ненегативност, M3 симетричност, а M4 неједнакост троугла, све из разумљивих разлога.

Занемарујући математичке детаље, за било који систем путева растојање између две локације се може дефинисати као дужина најкраћег пута који повезује те локације. Да би то била и метрика, не би смели постојати једносмерни путеви. Неједнакост троугла говори о томе да путеви са преседањем сигурно нису пречица, тј. да су такви путеви сигурно дужи од директног. Било који од примера наведених у овом раду се могу видети као конкретна верзија ове идеје. Када имамо дефинисану метрику на скупу, можемо дефинисати и појам метричког простора.

Дефиниција 2. Нека је дат непразан скуп $\mathbb{X}$ и нека је d једна метрика дефинисана на том скупу. Тада уређени пар $(\mathbb{X}, d)$ називамо метричким простором. Некада се, када се говори о метричком простору, наводи само скуп $\mathbb{X}$ и тада се функција d подразумева. Елементе метричког простора називамо *тачкама* или *векторима*.

Поставља се питање да ли је могуће на сваком скупу дефинисати метрику? Видећемо касније да за сваки скуп увек постоји бар једна метрика која је на

[4] Овиме је дозвољено да $\mathbb{X} = \emptyset$. Ако не би било укључена ова могућност, онда би сваки пут требало проверити да ли је скуп заиста непразан. Како ће у овом раду бити помињани само непразни скупови, ово није кључна чињеница и неће бити више посебног осврта на њу.

њему дефинисана. Из овог разлога је правилније при помињању метричког простора писати обе компоненте уређеног пара.

Такође, као додатак овако дефинисаној метрици, могу се дефинисати и неке *метрике* које немају потпун систем од 4 аксиоме из дефиниције 1, већ само неке од њих. Примери за то су:

- псеудометрика – ослабљена је особина M2, и не важи њен други смер, већ само да је $d(x,x)=0$ (дакле, и даље је могуће да је $d(x,y)=0$, за $x \neq y$). Она је јако важна пошто индукује тзв. *семинорму.* Због тога се често назива и семиметрика (и даље није усаглашен назив, и различити се користе у различитим областима математике).
- квазиметрика – симетрија не мора више обавезно да важи. Овај тип растојања није толико стран у стварном свету. На пример, на скупу планинских насеља може се дефинисати квазиметрика. Симетрија не важи јер је веће растојање (у смислу времена које је потребно да би се оно прешло) у случају пењање, него у супротном смеру (силажење).
- семиметрика – уклања се неједнакост троугла.

22. Неки карактеристични скупови у метричким просторима

Дефиниција 3. Нека је $(\mathbb{X},d)$ метрички простор, $a \in \mathbb{X}$ и r позитиван реалан број. **Отворена (затворена) кугла** са центром a и полупречником r је скуп

$$K(a,r)=\{x \in \mathbb{X} \mid d(x,a)<r\} \qquad (K[a,r]=\{x \in \mathbb{X} \mid d(x,a)\leqslant r\}).$$

Дефиниција 4. **Сфера** са центром a полупречника r јесте скуп

$$S(a,r)=\{x \in \mathbb{X} \mid d(x,a)=r\}.$$

Пример. У метричком простору $\mathbb{R}$ са стандардно дефинисаним растојањем (в.стр. 4) кугла $K(x,\delta)$ је интервал $(x-\delta,x+\delta)$. У метричком простору $\mathbb{R}^2$ затворене кугле су кругови и сфере кружнице, а у $\mathbb{R}^3$ то су лопте и сферне површи, редом. Што се тиче простора $\mathbb{R}_p^n$ (о коме ће бити речи у секцији 4) ту ови скупови могу имати разне геометријске интерпретације.

23. Векторски простор и норма вектора

У току рада биће помене у вези са векторским просторима и нормом вектора, па је корисно већ сада у уводу подсетити се дефиниције и основних појмова у вези са тим.

Дефиниција 5. Под *векторским* (или *линеарним*) простором над било којим пољем $\mathbb{K}$ подразумевамо сваки скуп $\mathbb{V}$ са дефинисане две операције – сабирање ($(u,v)\to u+v$, тако да је $u,v,u+v \in \mathbb{V}$) и множење скаларом ($(\alpha,v)\to \alpha\cdot v$, тако да је $\alpha \in \mathbb{K}$, и $v,\alpha v \in \mathbb{V}$), такве да за све $u,v,w \in \mathbb{V}$ и све $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ важе следеће особине:

1) $(u+v)+w=u+(v+w)$,

2) $v+u=u+v$,

3) $v+0=v$, за неки фиксирани елемент $0 \in \mathbb{V}$,

4) за свако v из $\mathbb{V}$ постоји бар једно x (које се често означава са $-v$) из $\mathbb{V}$ за које је $v + x = 0$,

5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,

7) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$,

8) за фиксирани елемент 1 из $\mathbb{K}$ је $1u = u$.

Елементе векторских простора $\mathbb{V}$ зовемо векторима, а елементе поља $\mathbb{K}$ скаларима. При томе, вектор $u + v$ називамо збиром вектора u и v, а вектор αv производом скалара α и вектора v. Ипак, овде ће бити речи само о реалним векторским просторима, тј. просторима над пољем $\mathbb{R}$ и ако се специфично не нагласи то поље ће се подразумевати. Следи дефиниција норме вектора у векторском простору. Њу можемо схватити као *дужину* вектора.

Дефиниција 6. Нека је $\mathbb{X}$ векторски простор (над пољем $\mathbb{R}$, рецимо) на коме је дефинисана функција $\|\cdot\|\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}_0^+$, са следећим особинама[5]

H1) $(\forall x \in \mathbb{X})\|x\| \geqslant 0$;

H2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

H3) За сваки скалар λ и сваки вектор x је $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

H4) $(\forall x, y \in \mathbb{X})\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Тада за функцију $\|\cdot\|$ кажемо да је норма на $\mathbb{X}$, а за $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ кажемо да је нормиран векторски (линеарни) простор.

Сада наводимо једну једноставну, али кључну теорему за повезивање дефинисаних појмова.

Теорема 1. Ако је $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор, онда је функција $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

метрика на $\mathbb{X}$. Самим тим је и $(\mathbb{X}, d)$ један метрички прсотор.

Доказ. Особине M1 и M2 следе из дефиниције норме. Убацујући $\lambda = -1$ у H3, закључујемо да је $\|x\| = \|-x\|$, одакле је због $\|x - y\| = \|-(x - y)\|$ доказано и M3. За M4 потребно је доказати $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$, што следи примењујући H4 на векторе $x - y$ и $y - z$. ❐

24. Нека својства метричких простора

Сада ћемо извести неке корисне особине метричких простора. Особина M4 се једноставно може генерализовати у тзв. *неједнакост многоугла*, тј. важи следећа

Лема 1. У сваком метричком простору $(\mathbb{X}, d)$ важи неједнакост многоугла, тј. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$, $n \geqslant 3$ је испуњено

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, d_n) \geqslant d(x_1, x_n).$$

[5] овде је са $\mathbb{R}_0^+$ означен скуп ненегативних реалних бројева

Доказ. Доказујемо ову неједнакост методом математичке индукције по броју тачака. За $n = 3$ знамо да је тачна по аксиоми, и то нам је уједно и база индукције. Претпоставимо да за неко $k \in \mathbb{N}$ и било које тачке $x_1, x_2, \ldots, x_k$ скупа $\mathbb{X}$ важи неједнакост $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{k-1}, d_k) \geqslant d(x_1, x_k)$. Докажимо да она важи и за било којих $k+1$ тачака. Изаберимо произвољних $k+1$ тачака $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{X}$ и применимо индуктивну хипотезу на тачке $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Додајући сабирак $d(x_k, x_{k+1})$ на обе стране претходне неједнакости и користећи базу индукције, добијамо $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_k, x_{k+1}) \geqslant d(x_1, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \geqslant d(x_1, x_{k+1})$, што је и требало доказати. ❒

Лема 2. Ако је $(\mathbb{M}, d)$ метрички простор, онда је за сваки непразан скуп $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$, такође и $(\mathbb{K}, d)$ метрички простор.

Доказ. Како је $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{M}$, онда све 4 особине метрике d ће важити на скупу $\mathbb{K}$, као што важе и на $\mathbb{M}$. Каже се још и да је извршена рестрикција на домену са $\mathbb{M}$ на $\mathbb{K}$. ❒

Лема 3. Нормиран метрички простор $(\mathbb{X}, d)$ обогаћен нормом $\|\cdot\|$ има додатне особине такве да је за све $x, y, z \in \mathbb{X}$ и $k \in \mathbb{R}$ испуњено

1° $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

2° $d(kx, ky) = |k| d(x, y)$,

које зовемо редом *транслаторна инваријантност* и *хомогеност.*

Доказ. За 1° имамо низ једнакости $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x, y)$, а за 2° $d(kx, ky) = \|(kx) - (ky)\| = \|k(x - y)\| = |k| \|x - y\| = |k| d(x, y)$. ❒

Ове особине чак ни немају смисла у било каквим метричким просторима, јер је често бесмислено сабирати тачке или множити их скаларом. Ако је $\mathbb{X}$ нормиран метрички простор, увек користимо метрику која је повезана са нормом, осим ако другачије није наглашено.

3 Неки примери метричких простора

Сада следе неки уводни и занимљиви примери метрика и метричких простора. После навођења одређеног примера уследиће и доказ да је напоменута структура заиста метрички простор. То ће бити учињено једноставно проверавајући четири особине наведене у дефиницији функције раздаљине. Наравно, како ће се и испоставити, особина која ће се најтеже проверавати је M4.

31. Уводни примери

Пример 1. **(Дискретна метрика)** Метрика дефинисана на било ком скупу $\mathbb{X}$ на следећи начин

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & \text{за } x\neq y\\ 0, & \text{за } x=y\end{cases}$$

назива се *дискретна метрика.* Очигледно су задовољене све четири особине из дефиниције, па је оправдано користити реч метрика. Иако на први поглед делује као тривијална, она је јако важна јер може бити заснована на било ком скупу. Специјално, ово показује да за било који скуп постоји метрика која му је привржена.

Сада ћемо проћи кроз један веома једноставан и интуитиван пример, поменут у уводном делу рада. Ради се о метрици коју познајемо и користимо, али у једној димензији. Она ће касније бити специјалан случај фамилије метрика $\mathbb{R}_n^p$.

Пример 2. Нека је функција $d:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ дата са $d=|x-y|$. Тада је $(\mathbb{C},d)$ један метрички простор. ($\mathbb{C}$ је скуп комплексних бројева, $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

Доказ. Својства M1, M2 и M3 следе из саме дефиниције. Остаје да докажемо да за произвољне комплексне бројеве x,y,z важи $|x-y|+|y-z|\geqslant|z-x|$. Уводећи смене $a=x-y$ и $b=y-z$, неједнакост се своди на $|a|+|b|\geqslant|a+b|$. Схватајући комплексне бројеве као векторе у комплексној равни можемо уочити да тачке 0, a и $a+b$ у тој равни образују троугао са страницама a, b и $a+b$. Примењујући неједнакост троугла (еуклидски) на тај троугао добијамо тражену неједнакост. ❐

Пример 3. Позитивни реални бројеви са метриком дефинисаном као $d=|\log(x/y)|$ чине један метрички простор.

Доказ. Најпре видимо да је подлогаритамски израз увек дефинисан, као и да је особина M1 очигледно тачна. За M2 имамо низ еквиваленција $d=0\Leftrightarrow\log(x/y)=0\Leftrightarrow x/y=1\Leftrightarrow x=y$. Из $\log(x/y)=-\log(y/x)$, следи M3. Доказаћемо сада M4. Користећи $\log(x/y)=\log x-\log y$, као и неједнакост троугла из на бројеве $(\log x-\log y)$ и $(\log y-\log z)$, добијамо $|\log(x/y)|+|\log(y/z)|=|\log x-\log y|+|\log y-\log z|\geqslant|\log x-\log z|=|\log(x/z)|$. Овиме је доказ завршен. ❐

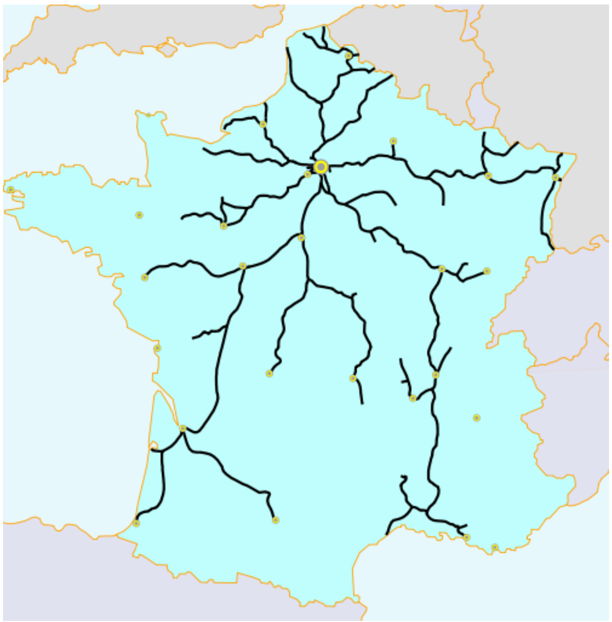
Пример 4. **(Поштанска метрика)** Нека је $\mathbb{S}$ неки скуп и $f:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_0^+$ функција која узима вредност нула највише једном. Метрика дефинисана са

$$d(x,y)=\begin{cases}f(x)+f(y), & \text{за } x\neq y\\ 0, & \text{за } x=y\end{cases}$$

назива се *поштанска метрика* (такође су честа имена *метрика британске железнице* или *SNCF*[6] *метрика*). Име алудира на то да путовања возом (или

[6] Société Nationale des Chemins de fer Français, Француска национална железничка компанија

писма) често у свом путу иду преко Лондона или Париза независно од њихове крајње дестинације. Растојање је приказано као збир два ненегативна броја – два растојања. Једно представља растојање од полазне тачке до прекретнице (Лондон, Париз, ...), а друго одатле до циља. Доказаћемо да је ово заиста метрика.



Слика 2: Главне железничке линије у Француској 1856. године

Доказ. Особине M1 и M3 следе из дефиниције. Доказаћемо M2 сада. Да би важило $d(x,y)=0$, мора бити (због ненегативности) $f(x)=f(y)=0$. Како у највише једној тачки ова функција узима вредност нула, то мора бити $x=y$. Други смер следи из дефиниције. Што се тиче M4, довољно је да за међусобно различите тачке по дефиницији распишемо $d(x,y)$ и користимо ненегативност. За $x \neq y \neq z \neq x$ је $d(x,y)+d(y,z) \geqslant d(x,z) \Leftrightarrow f(x)+f(y)+f(y)+f(z) \geqslant f(x)+f(z) \Leftrightarrow 2f(y) \geqslant 0$, што је тачно. Случај $x=z$ је очигледан, а ако би било $x=y$, онда $d(x,z) \geqslant d(x,z)$. Овим је доказ завршен. ❐

Пример 5. Концепт Ердошевог[7] броја[8] наводи на дефинисање метрике на скупу свих математичара. Нека су x и y два произвољна математичара. Дефинишемо растојање d као

$$d(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{за } x=y \\ 1, & \text{ако су сарађивали } x \text{ и } y \\ n, & \text{ако постоје математичари } a_1,\ldots,a_{n-1}\,(n\geqslant 2) \text{ тако да је низ} \\ & \{x,a_1\},\{a_1,a_2\},\ldots,\{a_{n-1},y\} \text{ најкраћи могући, где су у сваком} \\ & \text{кораку упарена два математичара који су били сарадници} \\ \infty, & \text{ако } x\neq y \text{ и не постоји такав низ} \end{cases}$$

[7]Paul Erdősh (1913 – 1996), мађарски математичар

[8]Ердошев број описује најкраће колаборативно растојање између особе и математичара Пола Ердоша мерено по ауторизацији научних радова. Ердош је за време свог живота учествовао у изради око 1500 радова са 511 директних сарадника. Они имају Ердошев број једнак 1. Људи који су сарађивали са њима, али не и са Ердошом лично имају број 2, итд. Постоје слично дефинисани бројеви и у другим научним областима.

Напомена. Ова метрика се лако генерализује на било који неусмерени граф, тако да је растојање између два чвора уствари дужина минималног пута од једног до другог чвора.

Такође, знак ∞ је сувишан у овој дефиницији (и прави проблем јер се не уклапа у растојање које је реалан број). Он се може заменити довољно великим бројем M, где је M број свих математичара који су икада живели (знамо да је тај број коначан, па самим тим и реалан). Овиме се обезбеђује да је M сигурно веће од свих растојања која се уклапају у ставку 3 дефиниције, па самим тим свака два математичара која су повезана имају растојање мање од M. То је зато што за свака два повезана математичара, минимални пут који их спаја сигурно не пролази два пута кроз истог математичара. У доказу ћемо користити овде наведени број M.

Доказ. Особине M1, M2 и M3 следе из дефиниције (ако је математичар x сарадник са y, онда је и y сарадник са x). Нека су x, y и z произвољни математичари и докажимо да важи $d(x,y)+d(y,z) \geqslant d(z,x)$. Ако, без умањења општости, x и y нису повезани, онда $d(x,y)+d(y,z) \geqslant M \geqslant d(z,x)$. Ако се поклапају, тј. $x=y$, онда $d(x,y)+d(y,z)=d(y,z)=d(z,x)$. Нека су сада оба пара са леве стране неједнакости повезана. Нека су x и y повезани као $\{x,a_1\},\{a_1,a_2\},\ldots,\{a_{n-1},y\}$, а y и z као $\{y,b_1\},\{b_1,b_2\},\ldots,\{b_{n-1},z\}$ (овде се укључују и случајеви када је неко од растојања 1, само тада одговарајући a_i и b_j неће бити потребни, већ имамо директну везу). Уочимо везу коју добијамо надовезивањем ове две $\{x,a_1\},\ldots,\{a_{n-1},y\},\{y,b_1\},\ldots,\{b_{n-1},z\}$. То значи да су x и z повезани и да је то једна веза међу њима, дужине $d(x,y)+d(y,z)$. Како је $d(z,x)$ минимално растојање између математичара z и x, онда је сигурно $d(z,x) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$, што комплетира доказ. ❒

Пример 6. **(p–адичка метрика)**, енг. *$p-adic$ metric*. Нека је p произвољан прост број. За произвољна два цела броја m и n дефинишемо растојање d_p као

$$d_p(m,n)=\begin{cases}0, & \text{за } m=n\\ \dfrac{1}{r+1}, & \text{за } p^r \parallel m-n\end{cases}$$

Тада је $(\mathbb{Z},d_p)$ метрички простор. (Ознака тачно дели $a^b \parallel c$ значи да $a^b \mid c$ и $a^{b+1} \nmid c$)

Доказ. Особине M1, M2 (пошто $r \geqslant 1$) и M3 следе из дефиниције. Остаје да докажемо неједнакост троугла, тј. да за произвољан p прост и све $m,n,l \in \mathbb{Z}$ важи $d_p(m,n)+d_p(n,l) \geqslant d_p(l,m)$. Ако би било $m=n$ (не губећи на општости), онда је $d_p(m,n)+d_p(n,l)=d_p(n,l)=d_p(l,m)$. Када је $l=m$, своди се на $d_p(m,n)+d_p(n,l)\geqslant 0$. Нека су сада сви различити у паровима. Нека $p^a \parallel m-n$, $p^b \parallel n-l$ и $a \leqslant b$. Запишимо $m-n=p^aA$ и $n-l=p^bB$, где $p \nmid A,B$. Онда имамо $m-l=p^a(A+p^{b-a}B)$. Одавде следи да је степен броја p који дели $m-l$ бар једнак a. То би значило да важи $d_p(m,l) \leqslant \dfrac{1}{a+1}$. Коначно имамо $d_p(m,n)+d_p(n,l)=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1} \geqslant \dfrac{1}{a+1} \geqslant d_p(m,l)$. ❒

Овај пример показује да се појам метричких простора може увести и у области попут теорије бројева, где се као такав не очекује. Такође, ова метрика се може проширити и на скуп свих рационалних бројева са одговарајућом нормом. Везано за ову метрика се дефинишу и бројеви овог типа (енг. *$p-adic$ numbers*) који имају широку примену у декодирању конгруенција. На пример, они су нашли и своју примену у познатом доказу *Велике Фермаове теореме* од стране Ендруа Вајлса[9].

32. Таксигеометријска метрика

Таксигеометрија је геометријска теорија разматрана од стране Хермана Минковског[10] у 19–ом веку. У њој је стандардно растојање Еуклидове геометрије замењено новом метриком (таксигеометријска метрика) у којој је растојање између две тачке сума апсолутних вредности њихових Декартових координата. Ова метрика је још позната и као d_1 *растојање*, l^1 *норма* (в. секцију 4), *растојање градских блокова, Менхетн растојање* или *Менхетн дужина*, са одговарајућим варијацијама у имену саме геометрије. Следи дефиниција метрике предложене од стране Минковског која је основ за традиционалну таксигеометрију.

Дефиниција 7. Таксигеометријско растојање d_t између две тачке $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ простора $\mathbb{R}^n$ дефинишемо као

$$d_t = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Оваква таксигеометрија се назива *непрекидна* или *континуална.* У случају да је уместо скупа $\mathbb{R}$ био скуп $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$ (по леми 2, ово ће остати метрички простор), таксигеометрија би била *дискретна.* Уствари, могуће је дефинисати таксигеометрију над скупом $\mathbb{K}^n$, где је $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Докажимо да ово заиста јесте метрика.

Доказ. Особине М1 и М3 следе из дефиниције. $d_t = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, x_i = y_i \Leftrightarrow x = y$, па је и М2 доказано. Што се тиче неједнакости троугла, довољно је сумирати све неједнакости облика $|x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geqslant |x_i - z_i|$, за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, где је ова неједнакост очигледна последица неједнакости троугла. ❐

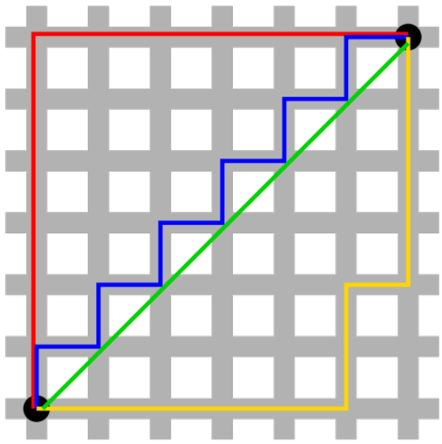
За $n = 1$ формула се своди на стандардно еуклидско растојање у једној димензији. За две димензије, тј. у случају када је $n = 2$, формула таксигеометријског растојања између тачака $X = (x_1, x_2)$ и $Y = (y_1, y_2)$ има облик

$$d_t = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Идеја иза ове формуле растојања је да најкраће растојање између два објекта не мора обавезно бити права линија, већ по хоризонталним и вертикалним линијама, као по улицама савршеног града где би иначе морао да иде такси. Отуда потиче оригинално име за ову геометрију.

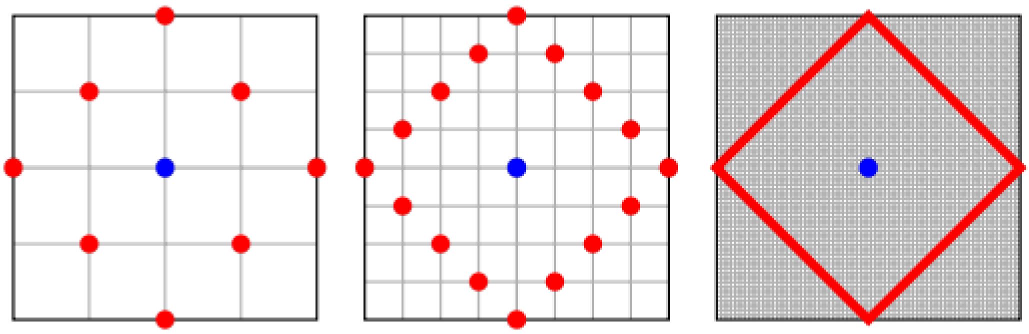
Даља имена, попут Менхетн растојања или растојање градских блокова, алудирају на облик мреже коју праве већина улица острва Менхетн. Овакав систем улица узрокује да је најкраће растојање које ауто мора да пређе између два места једнако броју раскрсница између њих. Овакав пут свакако није јединствен, што је и приказано на слици 3, где су црвеном, плавом и жутом изломљеном линијом приказана само три од много могућих путева између два места. Менхетн растојање је $d_t = 6 + 6 = 12$. У Еуклидовој геометрији, постоји јединствен најкраћи пут између две тачке (зелена линија) и у овом случају је дужине $6\sqrt{2} \approx 8.48$.

[9] Sir Andrew John Wiles (1953 –), британски математичар
[10] Hermann Minkowski (1864 – 1909), немачки математичар



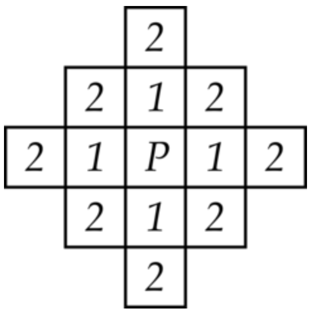
Слика 3: Приказ више Менхетн растојања и јединственог Еуклидовог

Сада ћемо видети по чему се разликују већ поменуте кружнице (сфере) у две димензије у таксигеометрији у односу на Еуклидову. Пре свега, једначина кружнице у координатном систему xOy са центром у (x_0, y_0) је $|x-x_0|+|y-y_0|= r$. Нека је геометрија континуална, а кружница полупречника r и са центром у O. Тада се једначина кружнице сведе на $|x|+|y|= r$. Дакле, у питању је квадрат странице $r\sqrt{2}$, заротиран око центра за угао $\pi/4$. Скица овог резултата за две дискретне (ређу и гушћу) и непрекидну метрику је приказана на слици 4. Видимо да је за кружницу полупречника r, њен обим једнак $8r$. То би значило да је геометријски аналог броју π у таксигеометрији број 4.



Слика 4: Кружнице у дискретним и континуалној таксигеометрији

У шаху, растојање између поља на табли за топове се мери дискретним Менхетн растојањем где посматрани скуп представља скуп поља табле.



Слика 5: Менхетн растојање 2 на шаховској табли

33. Чебишевљева метрика

Чебишевљева метрика (d_∞ *метрика* (в. секцију 4), *максимална метрика*) је метрика дефинисана на векторском простору (овде $\mathbb{R}^n$) где је растојање између две тачке представљено као максимум од свих разлика формираних по координатама. Названа је по П. Чебишеву[11].

Дефиниција 8. Чебишевљево растојање d_C дефинисано на скупу $\mathbb{R}^n$ између тачака $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ је дато са

$$d_C = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

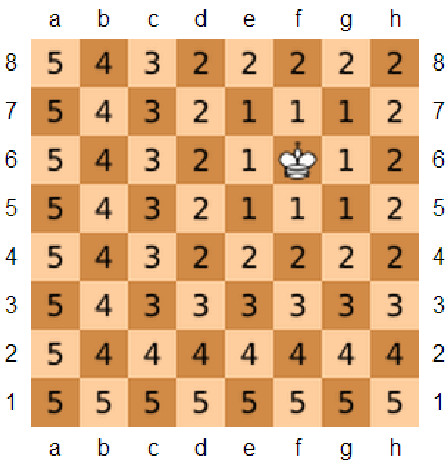
Докажимо да је ово заиста метрика.

Доказ. Особине M1 и M3 следе директно из дефиниције. За M2 имамо низ еквиваленција $d_C = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, x_i = y_i \Leftrightarrow x = y$. Уведимо трећу тачку као $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Остаје да се докаже да је $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i - z_i| \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - z_i|$. Нека је m онај индекс за који је израз $|x_i - z_i|$ максималан. Тада имамо да важи $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i - z_i| \geqslant |x_m - y_m| + |y_m - z_m| \geqslant |x_m - z_m| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - z_i|$. Последња неједнакост је последица неједнакости троугла. Овим смо доказали да је $(\mathbb{R}^n, d_C)$ један метрички простор. ❒

Као и код таксигеометријске метрике, разликујемо *дискретне* и *непрекидне* Чебишевљеве метрике. У случају једне димензије формула се своди на Еуклидово растојање (пример 2). За случај две димензије формула растојања између тачака $X = (x_1, x_2)$ и $Y = (y_1, y_2)$ гласи

$$d_C = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

и као такво има највеће примене. Чебишевљево растојање је такође познато и као *шаховско растојање*. Ово растојање између два поља шаховске табле (узимајући да су поља јединична) представља минимални број потеза које краљ мора да направи да би прешао са једног на друго. На пример, растојање између f6 и e2 је 4. Ниже је приказана стандардна табла 8×8 и Чебишевљево растојање сваког поља од поља f6. И растојање које краљица прелази се мери на овај начин.



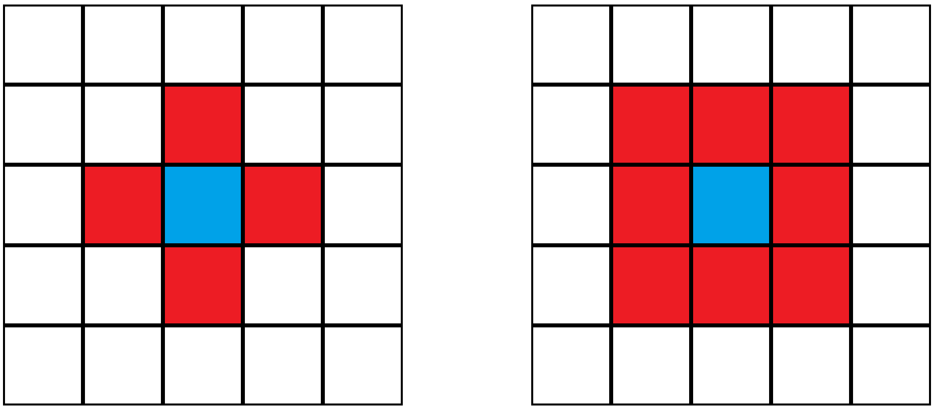
Слика 6: Чебишевљево растојање сваког поља од f6

[11] Пафнутии Львович Чебышев (1821 – 1894), руски математичар

Изглед кружница у овој (непрекидној) метрици није тешко утврдити. Уочимо кружницу са центром у $(0,0)$ и полупречника r. Њена једначина у Декартовим координатама гласи $\max\{|x|,|y|\}=r$. Видимо да ће то бити квадрат, са страницама паралелним координатним осама и центром у центру кружнице, са страницом $2r$. Еквивалент у дискретној метрици је очит, и може се видети у примеру са шахом на слици 6. Сфера у три димензије је коцка, чија је свака страна нормална на одговарајућу координатну осу, док се сфере у више димензија називају *хиперкоцке*.

Дводимензионо Менхетн растојање такође има кружнице (тј. дводимензионе сфере) у форми квадрата. На неки начин се раванско Чебишевљево растојање може схватити као еквивалент Менхетн растојању са одговарајућом ротацијом (за угао $\pi/4$) и скалирањем (са коефицијентом $\sqrt{2}$). Међутим, ова еквиваленција се не генерализује на више димензија. Сферна површ формирана користећи Чебишевљево растојање представља коцку, чија је свака страна нормална на једну од координатних оса. Са друге стране, сферна површ формирана користећи Менхетн растојање је октаедар.

У теорији *ћелијских аутомата* поља на Менхетн растојању од 1 (кружница полупречника 1) представљају фон Нојманов[12] комшилук. Слично, на кружници полупречника 1 мерено Чебишевљевим растојањем налази се Муров[13] комшилук. На слици 7 испод могу се видети примери оба комшилука. Црвеном бојом је означен одговарајући комшилук плавог поља.



Слика 7: фон Нојманов (лево) и Муров комшилук (десно)

[12] John von Neumann (1903–1957), мађарско–амерички математичар

[13] Edward Forrest Moore (1925–2003), амерички математичар

4 Метрички простори $\mathbb{R}_p^n$

Као шо је већ поменуто у уводном делу, скуп $\mathbb{R}^n$ са одговарајућим растојањем је јако битан и између осталог чини основу за анализу функција више променљивих (којом се овде нећемо бавити). Штавише, фамилија метричких простора која њега обухвата је веома широка и садржи генерализацију за број димензија, која је логично наметнута, као и увођење новог параметра, реалног броја $p > 1$. Да бисмо лакше наставили причу, најпре ћемо се осврнути на основне појмове који ће бити коришћени, као и доказ једне неједнакости која ће бити од круцијалног значаја за постојање оваквих метрика.

41. Неједнакост Минковског

Иако је ова неједнакост веома позната (као и остале овде наведене) биће пропраћена доказом ради комплетности овог одељка. Најпре ћемо доказати неке помоћне неједнакости које ће послужити као основа за лакше доказивање тражене неједнакости.

Теорема 2. (Јангова[14] неједнакост) Ако је $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и ако су u и v ненегативни реални бројеви[15], тада је

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $u^p = v^q$.

Доказ. Посматријамо функцију $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ за неко $a > 1$. Израчунавамо $f''(x) = (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a$. Како је $f''(x) > 0$ за свако x из домена, онда је функција $f(x)$ строго конвексна на $\mathbb{R}$. По дефиницији конвексне функције, то би значило да је за свака два реална броја x_1 и x_2 и свака два ненегативна броја λ_1 и λ_2 за које важи $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ испуњено

$$a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \leqslant \lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2$ или $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Даље, нека су p и q реални бројеви већи од 1 за које је $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тада бројеви $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}$ и $\lambda_2 = \dfrac{1}{q}$ задовољавају услове ненегативности, као и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Ако у последњој неједнакости уведемо смене $u = a^{\lambda_1 x_1}$ и $v = a^{\lambda_2 x_2}$, добићемо неједнакост коју је требало доказати. Једнакост важи ако и само ако је (пошто сигурно важи $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$) $u^p = v^q$. ❐

Напомена. Ово је само један случај Јангове неједнакости када је $p, q > 1$. Такође, овој слична једнакост важи (само је знак неједнакости окренут на другу страну) и када је (без умањења општости) $0 < p < 1$ и $q < 0$. Ово важи и за неједнакост формулисану у следећој теореми.

Теорема 3. (Хелдерова[16] неједнакост) Нека је $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и нека су $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ позитивни реални бројеви. Тада важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}.$$

[14] William Henry Young (1863 – 1942), енглески математичар
[15] овакви бројеви p и q често се зову спрегнути индекси
[16] Otto Hölder (1859 – 1937), немачки математичар

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{x_1^p}{y_1^q} = \dfrac{x_2^p}{y_2^q} = \ldots = \dfrac{x_n^p}{y_n^q}$.

Доказ. Означимо ради једноставности $X = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ и $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$. Заменимо ли у Јанговој неједнакости из теореме 2 $u = \dfrac{x_k}{X}$ и $v = \dfrac{y_k}{Y}$, за $k = 1, 2, \ldots, n$ добићемо

$$\frac{x_k y_k}{XY} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{x_k^p}{X^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_k^q}{Y^q},$$

одакле сумирајући по k следи следећа неједнакост

$$\frac{1}{XY} \sum_{k=1}^{n} x_i y_i \leqslant \frac{1}{pX^p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{qY^q} \sum_{k=1}^{n} y_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Одатле следи неједнакост $\sum_{k=1}^{n} x_i y_i \leqslant XY$, коју је и требало доказати. Једнакост важи ако и само ако је за свако $k \in 1, 2, \ldots, n$ испуњено $\left(\dfrac{x_k}{X}\right)^p = \left(\dfrac{y_k}{Y}\right)^q$, што се своди на $\dfrac{x_1^p}{y_1^q} = \dfrac{x_2^p}{y_2^q} = \ldots = \dfrac{x_n^p}{y_n^q}$. ❒

Коначно долазимо до неједнакости која нам је потребна, а коју формулише следећа

Теорема 4. **(Неједнакост Минковског)** Нека је $p > 1$ произвољан реалан број и нека су $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ позитивни реални бројеви. Тада важи неједнакост

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Доказ. Разбијмо суму са леве стране на две суме на следећи начин

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1}.$$

Применом Хелдерове неједнакости на леву од ове две суме, добијамо (реалан број q је одређен условом $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, тј. $q = \dfrac{p}{p-1}$, онда важи и $q > 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/q}.$$

Аналогно важи и за другу од две суме. Сабирајући их, а потом и делећи обе стране (позитивним) бројем $\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/q}$, имамо неједнакост

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p},$$

која је еквивалентна са траженом. Једнакост се достиже ако и само ако су испуњени услови $\frac{x_1^p}{((x_1+y_1)^p)^q} = \ldots = \frac{x_n^p}{((x_n+y_n)^p)^q}$ и $\frac{y_1^p}{((x_1+y_1)^p)^q} = \ldots = \frac{y_n^p}{((x_n+y_n)^p)^q}$, што је заиста еквивалентно са $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$. ❒

Напомена. Једнакост се може генерализовати на све реалне бројеве користећи чињеницу $|x_i|+|y_i| \geqslant |x_i + y_i|$. Формалније, ако је $p > 1$ реалан број и ако су $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ реални бројеви, онда важи неједнакост

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

Неједнакост Минковског у овом облику ћемо користити. Такође, важи и напомена око параметра p. Ако је $p < 1$, онда важи слична неједнакост у којој је промењен само знак неједнакости у онај супротни.

42. l^p норма и d_p растојање

Уопштено, не постоје алгебарске операције (осим функције растојања) дефинисане на метричком простору. Већина простора који се појављују у анализи су *векторски* (или *линеарни*) простори, и метрика на њима је обично изведена из **норме**, која је дефинисана у уводном делу.

Дефиниција 9. Нека је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор из $\mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 1$ реалан број. Дефинишемо l^p норму вектора x као

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Докажимо да је ово заиста норма.

Доказ. Најпре, уочимо да је $\mathbb{R}^n$ један векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ (све особине из дефиниције 3 се очигледно проверавају), па на њему можемо дефинисати норму. Својство H1 из дефиниције 4 је очигледно испуњено. Што се тиче H2, норма је нула, ако и само ако је свака од координата управо нула, што значи и да је сам вектор нула. Даље, имамо $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda x_i|^p\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda|\|x\|_p$. За особину H4, довољно је директно применити *неједнакост Минковског* која је доказана у претходном одељку за $p > 1$, док се неједнакост за $p = 1$ директно поверава. Овиме смо доказали да овако дефинисана l^p норма заиста то и јесте. ❒

Сада, сагласно теореми 1, изводимо метрику на $\mathbb{R}^n$ на основу ове норме.

Дефиниција 10. Скуп $\mathbb{R}^n$ са метриком дефинисаном са $d = d(x, y) = \|x - y\|_p$ за $p \geqslant 1$ чини један метрички простор. Такође је уобичајено име за ову метрику d_p *метрика.* Метрички простор $(\mathbb{R}^n, d_p)$ ћемо надаље обележавати са $\mathbb{R}^n_p$.

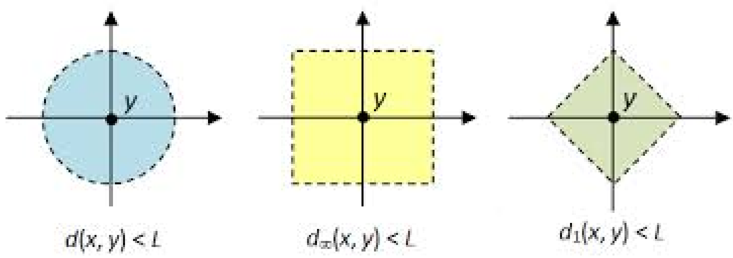
Сада ћемо видети чему воде неки специјални случајеви регулисани вредношћу параметра p. Дискутоваћемо три карактеристична случаја – када је $p = 1$, $p = 2$ и $p \to \infty$.

43. Неки карактеристични случајеви

- $p = 1$
  Када је $p = 1$ растојање ће бити следеће
  $$d_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$
  Видимо да ово одговара *таксигеометријском растојању*, обрађеном у претходној секцији.

- $p = 2$
  У овом случају добијамо растојање дефинисано са
  $$d_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$
  Овакво растојање често зовемо *Еуклидово растојање* у n димензија. Ово је свакако најпознатија и најчешће коришћена мера удаљености два објекта. За $n = 1, 2, 3$ добијамо редом растојања која су нам добро позната за једну, две или три димензије (в. пример 2 и увод на стр. 4). Уопштење на број димензија је јако значајно и чини основу за анализу функција више променљивих. За сваку променљиву уводимо по једну нову непознату, што геометријски може да се протумачи као нова оса у $(n + 1)$–димензионом координатном систему (где је једна оса вредност функције). При дефинисању појмова математичке анализе као што су *непрекидност* или *гранична вредност*, ε–околина неке тачке више неће бити интервал (осим у случају једне променљиве), већ отворена кугла полупречника ε. Често се, због сталне употребе ове метрике пише само d уместо d_2.

- $p \to \infty$
  За ову вредност параметра p имамо следећу метрику
  $$d_\infty = \lim_{p\to\infty} d_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|.$$
  Последња једнакост следи из *теореме о два полицајца*. Видимо да ово одговара *Чебишевљевом растојању* обрађеном у претходној секцији.



Слика 8: Изглед отворених кугли $K(y, L)$ за ове случајеве

5 Метрички простори дефинисани на скупу функција

У овој секцији бавићемо се метричким просторима на неком скупу који садржи функције. Овај приступ ће бити доста аналоган оном у претходној секцији, само што више нећемо мерити растојања између бројева, већ између две (непрекидне) функције, као што су $f(x) = \ln x$ и $g(x) = x^2 \cos x$. Растојање, како год га дефинисали, мора бити позитиван реалан број. Једна од ствари везана за функције, која за резултат има број је одређени интеграл. Функције ћемо разматрати на неком сегменту, управо да бисмо обезбедили постојање тог броја.

51. L^p норма и D_p растојање

Сходно претходној секцији дефинишемо норму, само овај пут на скупу функција.

Дефиниција 11. Нека су $a < b$ реални бројеви и нека је $C[a, b]$ скуп свих непрекидних функција f које сликају сегмент $[a, b]$ на скуп реалних бројева $\mathbb{R}$. Узмимо $f \in C[a, b]$ и $p \geqslant 1$ реалан број. Дефинишемо L^p норму функције f као

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Да претходни израз заиста има смисла за реалну функцију, тврди Вајерштрасова[17] теорема. Пре доказа да ово јесте норма, осврнимо се на једну лему која ће бити коришћена у доказу.

Лема 4. Претпоставимо да је $a < b$, $p \geqslant 1$ и $f \in C[a, b]$ таква да је $f(x) \geqslant 0$, за $x \in [a, b]$. Ако је

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

онда је $f(x) = 0$ за све $x \in [a, b]$.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да је $f(t) > 0$, за неко $t \in [a, b]$. По непрекидности можемо наћи $\delta > 0$ тако да је $|f(t) - f(x)| \leqslant f(t)/2$, за све $x \in [a, b] \cap [t - \delta, t + \delta]$. Из тога следи $f(x) \geqslant f(t)/2$, за све $x \in [a, b] \cap [t - \delta, t + \delta]$. Одатле имамо

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x \in [a,b] \cap [t-\delta, t+\delta]} f(x) \,\mathrm{d}x \geqslant \delta f(t)/2 > 0.$$

Што је контрадикција са претпоставком. ❐

Докажимо сада да норма из дефиниције 11 заиста то и јесте.

Доказ. Најпре, уочимо да је $C[a, b]$ један векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ (све особине из дефиниције 3 се лако проверавају), па на њему можемо дефинисати норму. Такође, како радимо са непрекидном функцијом на сегменту, следи да је она и интеграбилна (и њена апсолутна вредност је такође интеграбилна), па написани одређени интеграл постоји. Особина Н1 из дефиниције 4 следи како је $|f(x)|^p \geqslant 0$. Ако је $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$, онда је сигурно и норма једнака 0. Други смер Н2 следи директном применом леме 4 на функцију $|f(x)|^p$. Даље, имамо $\|\lambda f\|_p = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = |\lambda| \|f\|_p$, па

[17] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), немачки математичар

је и Н3 задовољено. За доказ Н4 послужићемо се неједнакошћу Минковског, доказаној у претходној секцији. Како и f и g интегралимо на истом сегменту, можемо за рачунање тих интеграла изабрати исту поделу интервала (чији модуо тежи нули), а онда и направити исти избор за комплет тачака у сваком од тих интервала поделе, уз помоћ којих рачунамо одређени интеграл. Ово следи из дефиниције интеграбилности. Сада се лако видети да се доказ ове неједнакости своди на примену (интегралне) неједнакости Минковског написане за интегралне суме за $p > 1$. За $p = 1$, доказ следи из неједнакости троугла. ❐

На основу овако дефинисане норме, може се извести и одговарајућа метрика.

Дефиниција 12. Скуп $C[a, b]$ са метриком дефинисаном са

$$D_p = D_p(f, g) = \|f - g\|_p = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

за $p \geqslant 1$ и функције $f, g \in C[a, b]$ чини један метрички простор.

Свака од метрика (одређених вредношћу параметра p) се може користити при оцени апроксимације функција. Међутим, није практично користити било које вредности параметра, а још мање рачунати одступање у општем случају. Зато се издвајају неки карактеристични случајеви за вредности параметра p. Као и раније, и сада ће бити интересантни случајеви $p = 1$, $p = 2$ и $p \to \infty$.

52. Неки карактеристични случајеви

- $p = 1$
  За ову вредност параметра, метрика се своди на

  $$D_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x$$

  Ово растојање се често назива *интегрална метрика*.

- $p = 2$
  Добијамо метрику облика

  $$D_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x}$$

  Ово растојање се често назива *средњеквадратно растојање* или *метрика средњег квадратног одступања*. Као што је то случај и са бројевима, и овде се ова вредност параметра најчешће користи. Ово растојање је практичније од претходног (за $p = 1$), јер је нестала апсолутна вредност. Замислимо ситуацију у којој имамо задате тачке мерене на неки начин, и познату функцију који оне апроксимирају. Управо користећи идеју о минимализацији дискретне верзије овог растојања, добијају се параметри који потпуно одређују ту функцију. Овај метод је познат као *метод најмањих квадрата*. Примера ради, за линеарну функцију се могу на основу тачака добити коефицијент правца и одсечак на y–оси. Тада кажемо да смо провукли најбољу могућу праву кроз дате тачке. Друга врста проблема који може да се јави је питање која од функција најбоље апроксимира дату функцију на неком интервалу. Функције којима се апроксимира су често полиноми, и то малог степена, јер је то знатно повољније за компјутерска (а и ручна израчунавања). Функције које се апроксимирају су често компликоване за рачунања, или их је чак ручно без таблица и немогуће израчунати. Управо се као растојање између две функције (које треба минимизовати) често користи управо ово. Ево једног једноставног примера за илустрацију.

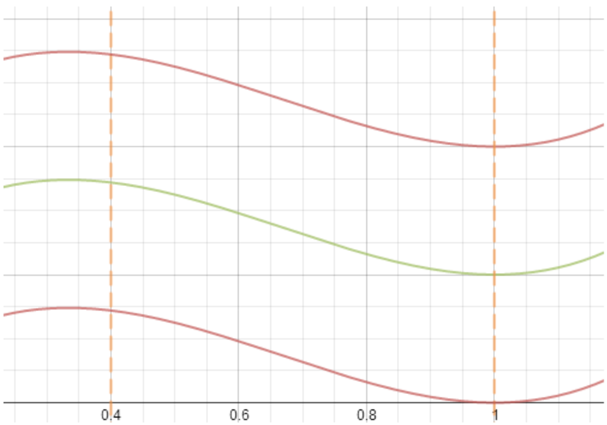
Пример. Који од полинома $P(x) = 2x^2 + 1$ или $Q(x) = x^2 + x + 1$ боље апроксимира функцију $f(x) = e^x$ на интервалу $[0, 1]$ у средњеквадратној апроксимацији.

Решење. Одредимо D_2 растојања ових полинома од функције. Посматраћемо квадрате растојања. Имамо $d_1^2 = D_2^2(P, f) = \int_0^1 (f(x) - P(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (e^x - 2x^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x(2x^2+1) + 4x^4 + 4x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x(2x^2 - 4x + 5) + \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - 6e + \frac{379}{30}$, као и $d_2^2 = D_2^2(Q, f) = \int_0^1 (f(x) - Q(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (e^x - x^2 - x - 1)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x(x^2 + x + 1) + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x(x^2 - x + 2) + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - 4e + \frac{36}{5}$. Како је $d_2^2 - d_1^2 = 2e + \frac{216 - 379}{30} = \frac{60e - 163}{30} > 0$, односно $d_2 > d_1$, то би значило да за бољу апроксимацију функције $f(x) = e^x$ на интервалу $[0, 1]$ можемо узети полином $P(x) = 2x^2 + 1$. ❐

- $p \to \infty$
  У овом случају се лако изводи

$$D_\infty = \lim_{p\to\infty} D_p = \lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Испод се може видети пример (затворене) кугле за овакав тип метрике. Центар сфере је у функцији која је обележена зеленом бојом, док јој је полупречник једнак 0.2. Границе сфере су обележене црвеним функцијама.



Слика 9: Пример сфере у простору $(C[0.4, 1], D_1)$

6 Метрички простори на стринговима

Да ли можемо мерити растојање неких објеката који нису наизглед математички? На пример, шта би било растојање између два модела аутомобила, или можда две слике људског лица? Испоставља се да можемо неке ствари попут ових формализовати и изградити метрички простор над одговарајућим скупом. У овом поглављу биће више речи о растојању између две *речи*, или како ћемо их овде звати – *стрингови*[18]. Интуитивно је јасно шта стринг треба да буде, али упркос томе, ради стриктног дефинисања даљих ствари, следи преглед основних појмова.

61. Основни појмови

Дефиниција 13. Нека је $\mathbb{A}$ коначан скуп *симбола* (такође познатих као *карактери* или *слова*). Њега ћемо звати **азбука** (или **алфабет**). **Стринг** над скупом $\mathbb{A}$ је секвенца симбола из $\mathbb{A}$.

Напоменимо да не постоје никаква ограничења о врсти слова у азбуци, то могу бити било како дефинисани облици. На пример, ако је азбука $\mathbb{A} = \{\$, f, 0, 1\}$, онда је $01\$0f1$ један стринг над њом. Такође, могуће је наметнути правила за изградњу стрингова. Један од начина за то је одредити аксиоме (стрингови од којих се полази), као и правила извођења, такозвана *граматика* (на тај начин се заснивају *формалне теорије*). Могуће је то учинити и директно. У овом примеру смо могли рећи да секвенца која почиње са 0 није стринг, па овај пример не би био легитиман. У случају да се ништа не наговести, подразумева се да су све комбинације укључене.

Дужином стринга ћемо означавати укупан број слова у том стрингу. Ова вредност може бити било који ненегативан цео број. **Празан стринг** је јединствени стринг над датом азбуком $\mathbb{A}$, дужине 0. Уобичајена ознака за њега је ε. Скуп свих стрингова над азбуком $\mathbb{A}$ који су дужине n ћемо надаље означавати са $\mathbb{A}^n$, док ћемо скуп свих могућих стрингова над азбуком $\mathbb{A}$ било које дужине означавати са $\mathbb{A}^*$

Пример. Важе следећа тврђења:

- Ако је азбука $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, онда је $\mathbb{A}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$;
- $\mathbb{A}^0 = \{\varepsilon\}$, за било коју азбуку $\mathbb{A}$;
- $string \in \mathbb{A}^6$ и $qwerty \in \mathbb{A}^*$, за азбуку $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$.

Оно што ће даље бити коришћено у овом раду је азбука сачињена од малих слова енглеске абецеде $\mathbb{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$ за дефинисање разних метрика на тој азбуци. Ову азбуку ћемо овде звати стандардна азбука. Сада дефинишимо шта мислимо када кажемо трансформација једног стринга у други.

Дефиниција 14. Нека су a и b два стринга над азбуком $\mathbb{A}$. Растојање уређивања (енгл. *edit distance*) је најмањи могући број *операција уређивања* које трансформишу a у b. Следи неколико једноставних оваквих операција које су најчешће коришћене (α и β су произвољни стрингови ове азбуке):

- **Убацивање** слова. Ако је $a = \alpha\beta$, онда убацивањем слова x можемо добити стринг $\alpha x \beta$.

[18] овај појам се и код нас усталио у програмирању

- **Брисање** слова. Ако је $a = \alpha x \beta$, онда брисањем слова x можемо добити стринг $\alpha\beta$. Ова операција је инверзна убацивању.

- **Замена** различитих слова. Ако је $a = \alpha x \beta$, онда заменом слова x словом $y \neq x$ можемо добити $\alpha y \beta$.

- **Транспозиција** суседнох слова. Ако је $a = \alpha xy \beta$, онда транспозицијом слова x и y можемо добити $\alpha yx \beta$.

Различита растојања која будемо обрадили ће користити управо неке од наведених операција. Даља генерализација овога би подразумевала додељивање одређених тежина датим операцијама. На пример, у некој имплементацији би операција замене слова x словом y могла бити еквивалентна композицији операција брисања слова x и убацивања слова y, па би се њој доделила тежина 2 (ако је тежина основних операција 1). Међутим, овде ћемо подразумевати да су све тежине једнаке 1. Уз напомену да операције брисања и убацивања морају увек ићи у пару, докажимо сада да је функција која даје минималан број оваквих операција (неких од њих) заиста метрика на одговарајућем скупу.

Доказ. Свакако, растојање не може бити негативан број, па важи M1. Чињеница да је растојање између два стринга једнако нули је еквивалентна са тим да није потребно правити никакву промену да би се од једног стигло до другог, што ће рећи да су они исти. Ако су два стринга иста, растојање је нула, па следи и M2. Приметимо да су операције замене и транспозиције саме себи инверзне, тј. ако их двапут применимо на исти стринг (можда за различита слова) вратићемо се на исти стринг. Такође, приметимо да су операције брисања и убацивања инверзне једна другој (из тог разлога морају ићи у пару). Из ових аргумената лако следи M3 јер постоји аналоган низ потеза превођења једног стринга у други и обрнуто. Остаје нам да докажемо неједнакост троугла $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$ за стрингове x, y и z, колико год то у овом случају звучало чудно. Нећемо се задржавати детаљно на овоме, па следи доказ у духу тога. $d(x,z)$ је најмањи могући број операција које треба извршити да би се од стринга x дошло до стринга z. $d(x,y) + d(y,z)$ ће онда бити минималан број операција потребних да се од x дође до z, али ће обавезно као један међукорак имати y. Како је и такав један пут кандидат за минимални (можда то и јесте) онда је сигурно $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$, што је и требало доказати. ❒

62. Хамингово растојање

Најједноставнији пример дефинисања растојања између два стринга је *Хамингово растојање*, које је настало по идеји Ричарда Хаминга[19]. Ова функција веома интуитивно мери растојање између два стринга исте дужине. Следи формална дефиниција.

Дефиниција 15. Нека је $\mathbb{A}$ произвољна азбука и n ненегативан цео број. Даље, узмимо $s_1, s_2 \in \mathbb{A}^n$ њена два произвољна стринга дужине n. Хамингово растојање $d_H(s_1, s_2)$ између њих дефинишемо као број места на којима се ти стрингови разликују. Другим речима, оно мери минимални број операција замене које су потребне да би се од једног стринга добио други, или минимални број грешака које су могле да од једног стринга направе други.

[19]Richard Wesley Hamming (1915–1998), амерички математичар

Пример. Узмимо стандардну азбуку. Тада имамо следеће једнакости: $d_H(abba, baba) = 2$; $d_H(ababab, bababa) = 6$; $d_H(sekira, sekica) = 1$; $d_H(matematika, geometrija) = 8$.

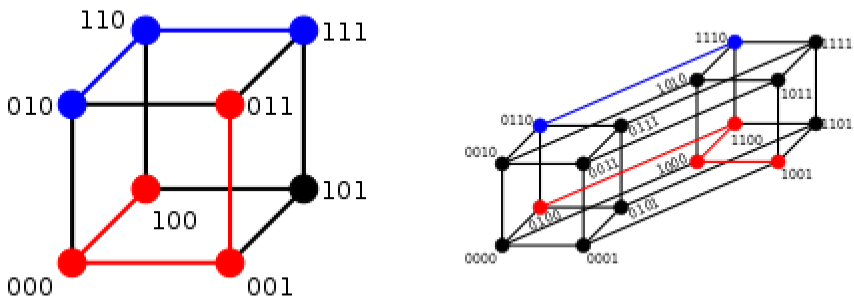
Напоменимо да, да би Хамингово растојање између два стринга било дефинисано, они морају бити исте дужине. Одавде закључујемо да је $(\mathbb{A}^n, d_H)$ метрички простор, за произвољну азбуку $\mathbb{A}$.

За два бинарна стринга a и b (то су стрингови над азбуком $\mathbb{A} = \{0, 1\}$) Хамингово растојање је једнако броју јединица у стрингу $a\text{XOR}b$, што се види из следеће табеле.

x	y	$x\text{XOR}y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Слика 10: Бинарна операција XOR над битовима

Бинарни стринг дужине n се може гледати као вектор у простору $\mathbb{R}^n$ где његов садржај слова означава координате. Овакви вектори представљају темена једне хиперкоцке. Хамингово растојање између два стринга је еквивалентно Менхетн растојању између тих темена. Примера ради, на слици 10, важи $d_H(000, 011) = 3$, као и $d_H(010, 111) = 2$ и тако и којим год путем кренули, минимум нам је потребно тачно 3, односно 2 померања, што одговара Менхетн растојању између тих темена. Слично важи и у четири димензије где видимо да је нпр. $d_H(1001, 0100) = 3$. За визуелну интерпретацију хиперкоцке у четири димензије користи се модел под називом *тесеракт*. Он нуди тополошки исправну интерпретацију, док остале ствари не остају на снази.



Слика 11: Пример у три (лево) и четири димензије (десно)

Хамингово растојање се користи и у телекомуникацијама као мера обрнутих битова у бинарној речи фиксне дужине да би се открила грешка. Из тог разлога се некада ово растојање зове и *растојање сигнала*. На табли, попут шаховске, Хамингово растојање између два поља (означена стрингом дужине 2 по стандардној нотацији) представља минималан број потеза који је потребан топу за померање са једног на друго.

Алгоритам налажења Хаминговог растојања је веома једноставан и брз и то је његова највећа предност у односу на остала растојања овог типа. Уочавајући свако слово стринга посебно и упоређујући га са словом на истом месту у другом стрингу, једноставно се пребројава растојање између њих. Стрингови морају бити исте дужине да би се алгоритам извршио. Ако је њихова дужина n, онда алгоритам ради у временској сложености $\Theta(n)$.

63. Левенштајново растојање

Остаје неколико ствари које Хамингово растојање не решава. Међу њима је и питање растојања између стрингова различите дужине, где очигледно морамо укључити и операције убацивања или брисања. Једно од таквих растојања је и *Левенштајново растојање*, дефинисано од стране Владимира Левенштајна[20].

Дефиниција 16. Нека је $\mathbb{A}$ произвољна азбука. Даље, узмимо $s_1, s_2 \in \mathbb{A}$ њена два произвољна стринга. Левенштајново растојање $d_L(s_1, s_2)$ дефинишемо као минималан број операција убацивања, брисања или замене које је потребно извршити да би се од s_1 дошло до s_2.

Пример. Узмимо стандардну азбуку. Тада имамо следеће једнакости: $d_L(abababa, bababa) = 1$; $d_L(nekiolik, nekoliko) = 2$; $d_L(pomeraj, pomeranje) = 2$.

Како за дефинисање овог растојања није обавезно да су стрингови исте дужине, можемо рећи да су они из скупа $\mathbb{A}^*$. Одатле је $(\mathbb{A}^*, d_L)$ један метрички простор, за произвољну азбуку $\mathbb{A}$.

Ефикасан алгоритам налажења Левенштајновог растојања користи технику динамичког програмирања. Следи скица алгоритма.

Претпоставимо да тражимо растојање између стрингова s_1 и s_2 који су редом дужина l_1 и l_2. Формирајмо динамичку матрицу A димензија $l_1 \times l_2$ и са $A[i, j]$ означимо њено поље у i–тој врсти и j–тој колони (индексирање почиње од 1). За $1 \leqslant i \leqslant l_1$ и $1 \leqslant j \leqslant l_2$ формирајмо стринг d_1 као део стринга s_1 од почетка до i–тог карактера и стринг d_2 као део стринга s_2 од почетка до j–тог карактера. У пољу $A[i, j]$ упишимо Левенштајново растојање између стрингова d_1 и d_2. Решење нашег проблема биће записано у пољу $A[l_1, l_2]$. Поља $A[1, j]$ представљају растојање од празног стринга (ε) до неког дужине j, тако да је $A[1, j] = j$. Слично је $A[i, 1] = i$. Повезаћемо $A[i, j]$ са $A[i, j-1]$, $A[i-1, j]$ и $A[i-1, j-1]$, за $2 \leqslant i \leqslant l_1$ и $2 \leqslant j \leqslant l_2$. Нека су са c_1 и c_2 редом означена слова i–том месту у првој речи и j–том месту у другој речи. У случају да је $c_1 = c_2$, проблем се своди на налажење растојања два стринга без ових слова, односно $A[i, j] = A[i-1, j-1]$. За $c_1 \neq c_2$ посматрајмо бројеве $A[i, j-1]$ и $A[i-1, j]$. Узмимо мањи од њих и додајмо један одговарајући карактер (c_1 или c_2). Очигледно је то најмањи могући број потеза. Дакле, сумирајући све можемо писати

$$A[i, j] = \begin{cases} A[i-1, j-1], & \text{за } c_1 = c_2 \\ \min\{A[i, j-1], A[i-1, j]\} + 1, & \text{за } c_1 \neq c_2 \end{cases}$$

Овај тип рекурентне везе је могуће израчунати тако да је у сваком потезу до попуњења целе матрице увек бар једно поље могуће израчунати. Како је за време итеративног процеса попуњена цела матрица, и то једно поље по итерацији, временска сложеност овог алгоритма је $\Theta(l_1 l_2)$.

Примена ове врсте растојања је многобројна. Примери за то су у биоинформатици (упоређивањем гена различитих врста могу се одредити функције одређених региона, открити путеве еволуције, као и упоређивати јединке у потрази за мутацијама), машинским преводиоцима, препознавању говора, теорији претраге. У сваком од ових примера се тежи ка томе да се одреди колико су слична два објекта и онда се најсличнији користе као тачни.

[20] Владимир Иосифович Левенштеин (1935 –), руски информатичар

7 Литература

1. Д. Аднађевић, З. Каделбург: *Математичка анализа* II, шесто издање, Математички факултет, Круг, Београд 2011.

2. З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић: *Анализа са алгебром 4, уџбеник са збирком задатака за 4. разред Математичке гимназије*, пето допуњано издање, круг, Београд 2011.

3. Г. Калајџић: *Линеарна алгебра и геометрија*, прво издање, Завод за уџбенике, Београд 2011.

4. Н. Окачић, В. Пашић: *Математика* II, ЕТФ – Универзитет у Тузли, Тузла 2013.

5. T. W. Körner: *Metric and Topological Spaces*

6. en.wikipedia.org

7. sr.wikipedia.org

8. www.taxicabgeometry.net